Modèle de Solow avec progrès technique et croissance de population

Malte Thie

1 Les bases

Considérons une économie qui produit sa production Y avec deux facteurs de production et un certain niveau technologique :

- K : capital
- N : travail
- A : niveau technologique

Nous supposons dans la suite que le niveau technologique augmente l'efficacité du facteur *travail*. En d'autres termes, une augmentation de la technologie augmentera la productivité d'un travailleur et augmentera donc, pour un nombre de travailleur donné, la production par travailleur (nous allons voir la dérivation de ce résultat dans la suite).

Nous pouvons donc écrire la fonction de production en termes générales de la façon suivante :

$$Y = F(K, AN). \tag{1}$$

Rééc rivons maintenant la production en **notation intensive** par travailleurs effectif, c'est-à-dire en divisant le tout par AN. Pour meilleure compréhension, un travailleur effectif est donné par un travailleur augmenté par l'état technologique (comme nous l'avons mentionné auparavant la technologie augmente la productivité du facteur travail). L'idée de passer à la notation intensive est de garder le facteur travail constant et de se concentrer sur le facteur capital. Par ailleurs, garder le facteur travail constant implique aussi de diviser par AN (en non pas par N), car la technologie augmente la contribution du facteur travail. La fonction de production en notation intensive donne donc :

$$\begin{aligned}
\frac{Y}{AN} &= F\left(\frac{K}{AN}, 1\right) \\
\frac{Y}{AN} &= f\left(\frac{K}{AN}\right) \\
\hat{y} &= f(\hat{k}) \qquad (2)
\end{aligned}$$

Soit la fonction de production suivante :

$$Y = K^{1-\alpha}(AN)^{\alpha}. \tag{3}$$

Le passage à la notation intensive donne ensuite :

$$\hat{y} = \hat{k}^{1-\alpha} \tag{4}$$

2 La dynamique du capital

Le capital évolue en fonction de ses gains et de ses pertes d'une période à l'autre. Commençons par les **pertes** du capital. D'une période à l'autre, le stock de capital est sujet à un **taux de dépréciation**, c'est-à-dire qu'une partie du stock en période t devient obsolète dans la période suivante $t + 1$. C'est ce taux de dépréciation qui représente la perte de capital d'une période à l'autre.

Ensuite, regardons les **gains** en terme de stock de capital. Ces gains sont constitués premièrement par le **stock de capital de la période précédente** (diminué évidemment par le taux de dépréciation) et deuxièmement par **l'investissement**. Dans ce modèle nous faisons l'hypothèse que **l'investissement est égal à l'épargne**, cette dernière étant déterminée par le *taux d'épargne*.

Nous pouvons donc écrire l'accumulation du capital en $t + 1$ comme :

$$K_{t+1} = K_t + sF(K_t, A_tN_t) - \delta K_t, \tag{5}$$

où s représente le taux d'épargne, $sF(K_t, A_tN_t)$ représente l'épargne totale (et donc l'investissement) et δ représente le taux de dépréciation. Passants à la notation intensive (donc en divisant par A_tN_t), nous obtenons :

$$\frac{K_{t+1}}{A_tN_t} = \hat{k}_t + sf(\hat{k}_t) - \delta\hat{k}_t. \tag{6}$$

Ce que nous cherchons à ce stade, c'est l'accumulation du capital en $t+1$ en notation intensive (i.e. $\hat{k}_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}}$). Nous allons donc multiplier le côté gauche de l'équation (6) par $\frac{A_{t+1}N_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}}$, pour obtenir :

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}} \times \frac{A_{t+1}}{A_t} \times \frac{N_{t+1}}{N_t} = \hat{k}_t + sf(\hat{k}_t) - \delta\hat{k}_t. \tag{7}$$

Ensuite, nous savons que $\frac{A_{t+1}}{A_t}$ est égal au taux de croissance de la technologie A (augmenté par 1), et que de manière symétrique $\frac{N_{t+1}}{N_t}$ est égal au taux de croissance de la population N (augmenté également par 1). En résumé :

- $\frac{A_{t+1}}{A_t} = 1 + g_A$
- $\frac{N_{t+1}}{N_t} = 1 + g_N$

Remplacer cela dans l'équation (7) nous donne :

$$\begin{aligned} \hat{k}_{t+1}(1 + g_A)(1 + g_N) &= \hat{k}_t + sf(\hat{k}_t) - \delta\hat{k}_t \\ \hat{k}_{t+1}(1 + g_A + g_N + g_Ag_N) &= \hat{k}_t + sf(\hat{k}_t) - \delta\hat{k}_t, \end{aligned} \tag{8}$$

où on peut utiliser un développement limité à l'ordre 1 (c'est-à-dire que $g_A g_N \approx 0$; exemple : supposons que $g_A = 5\%$ et $g_N = 5\%$, alors $g_A g_N = 0,05 \times 0,05 = 0,0025 = 0,25\% \approx 0\%$) pour obtenir :

$$\hat{k}_{t+1}(1 + g_A + g_N) = \hat{k}_t + sf(\hat{k}_t) - \delta\hat{k}_t. \tag{9}$$

3 L'état stationnaire

L'état stationnaire est défini comme le point au quel on n'accumule plus de capital *par travailleur effectif*, c'est à dire que la part du capital dans la production est constante. Cela implique que $\hat{k}_{t+1} - \hat{k}_t = 0$ (et du coup que $\hat{k}_{t+1} = \hat{k}_t = \hat{k}^*$). Si on réarrange équation (9), on peut ainsi obtenir le suivant :

$$\hat{k}_{t+1} - \hat{k}_t = sf(\hat{k}_t) - \delta\hat{k}_t - (g_A + g_N)\hat{k}_t, \tag{10}$$

ce qui, sachant que $\hat{k}_{t+1} - \hat{k}_t = 0$ et donc $\hat{k}_{t+1} = \hat{k}_t = \hat{k}^*$, nous mène à **l'équation de l'état stationnaire** dans le modèle de Solow avec progrès technique et croissance de la population :

$$sf(\hat{k}^*) = (\delta + g_A + g_N)\hat{k}^*. \tag{11}$$

L'intuition derrière cette dernière équation peut également être exprimée en mots : pour qu'il n'y ait pas d'accumulation de capital par travailleur effectif (c'est à dire pour un niveau du facteur travail constant), il faut que les gains de capital par travailleur effectif d'une période à l'autre (l'investissement $sf(\hat{k}^*)$) soient exactement égaux aux pertes du capital par travailleur effectif (qui est diminué par le taux de dépréciation (δ), mais aussi par la croissance de la technologie A (g_A) et de la population N (g_N), car $\hat{k} = \frac{K}{AN}$).

Nous pouvons ensuite utiliser équation (11), ainsi que la forme de la fonction de production (en termes intensive) dans l'équation (4), pour dériver le capital par travailleur effectif qui correspond au **sentier de croissance équilibré** (SCE ; c'est égal à l'état stationnaire dans le modèle de Solow avec progrès technique ; cela signifie que l'output et les deux inputs sont en équilibre, ils croissent au même taux : $g_A + g_N$) :

$$\begin{aligned} s\left(\hat{k}^*\right)^{1-\alpha} &= (\delta + g_A + g_N)\hat{k}^* \\ \hat{k}^* &= \left(\frac{s}{\delta + g_A + g_N}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned} \tag{12}$$

En utilisant la production en notation intensive présentée dans l'équation (4), nous pouvons également déterminer le niveau de production par travailleur effectif au SCE :

$$\hat{y}^* = \left(\hat{k}^*\right)^{1-\alpha} = \left(\left(\frac{s}{\delta + g_A + g_N}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{s}{\delta + g_A + g_N}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}. \tag{13}$$

4 Le taux de croissance au SCE

Comme nous l'avons vu, au SCE nous avons pas de croissance du capital *par travailleur effectif*, ni de la production *par travailleur effectif* :

$$\Delta \frac{Y}{AN} = 0$$
$$\Delta \frac{K}{AN} = 0$$

Vu que nous avons une croissance continue de A et N à la hauteur de g_A et g_N respectivement, pour que les relations $\frac{Y}{AN}$ et $\frac{K}{AN}$ soient constants d'une période à l'autre, nous pouvons en déduire que sur le SCE la production Y et le capital K croissent tous les deux au taux $g_A + g_N$. On peut également en déduire que la production par travailleur $\frac{Y}{N}$ et le capital par travailleur $\frac{K}{N}$ croissent au taux g_A, car sur le SCE la croissance de Y et K dépasse la croissance de N par g_A.